MATH104.5 Diffurjöfnur

Kjartan G. Magnusson and Gunnar Stefansson

October 27, 2014

Contents

1 Inngangur að diffurjöfnum

1.1 Diffurjöfnur

> Við þekkjum jöfnur af gerðinni
>
> $$\frac{dy}{dx} = h(x)$$
>
> þar sem h er eitthvert fall, og við vitum hvernig má leysa þær:
>
> $$y = \int h(x)dx + C.$$
>
> Þetta er dæmi um **diffurjöfnu**: y er eitthvert fall af x, t.d. $f(x)$, og gefið er samband sem diffurkvótinn $\frac{dy}{dx}$ uppfyllir, en finna þarf sjálft fallið $y = f(x)$.

Við þekkjum jöfnur af gerðinni

$$\frac{dy}{dx} = h(x)$$

þar sem h er eitthvert fall, og við vitum hvernig má leysa þær:

$$y = \int h(x)dx + C.$$

Þetta er dæmi um **diffurjöfnu**: y er eitthvert fall af x, t.d. $f(x)$, og gefið er samband sem diffurkvótinn $\frac{dy}{dx}$ uppfyllir, en finna þarf sjálft fallið $y = f(x)$.

Dæmi: Diffurjöfnur eru mýmargar í líffræði, t.d. fiskifræði og kerfislíffræði, lyfjafræði, eðlisfræði, efnafræði o.s.frv.

1.2 Dæmigerð uppsetning diffurjöfnu

> Oft byrjum við á að hugsa um, hvernig t.d. fall af tíma hljóti að breytast á stuttu tímabili og skrifum jöfnu sem lýsir $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ sem falli af öðrum þáttum.
> Þetta leiðir til diffurjöfnu þegar við látum Δt stefna á núll.

Dæmi: Eðlilegt er að gera ráð fyrir að breytingar í fjölda fiska í tilteknum árgangi breytast þannig að fast hlutfall drepist á stuttum tíma:

$$\frac{\Delta N}{N} = -Z\Delta t$$

sem leiðir til diffurjöfnu.

1.3 Eru til einkvæmar lausnir?

> Oft er unnt að heilda og finna þá "almenna lausn".
> Ef gefin eru upphafsskilyrði s.s. $y(x_0) = y_0$ má oft finna sérlausn sem uppfyllir skilyrðið.
> Hugsanaleikur: Ef við þekkjum byrjunargildi og afleiðu, þá getum við teiknað fallið áfram með línulegum nálgunum (aðferð Euler, sjá síðar).

Oft er unnt að heilda og finna þá "almenna lausn", en það er alls ekki fyrirfram gefið að unnt sé að leysa diffurjöfnuna almennt.

Ef gefin eru upphafsskilyrði s.s. $y(x_0) = y_0$ má oft finna sérlausn sem uppfyllir skilyrðið.

Athugum samt að ef við þekkjum byrjunargildi og afleiðu, þá getum við teiknað fallið áfram með línulegum nálgunum (aðferð Euler, sjá síðar). Oft er einungis hægt að leysa flóknar jöfnur tölulega.

1.4 Diffurjafna af 1.stigi

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

(x kallast óháð breyta, y háð breyta).

Diffurjafnan er „sjálfstæð“ (autonomous) ef rita má $f(x,y) = g(y)$ svo jafnan verður

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

(þ.e. x kemur ekki beint fyrir í jöfnunni).

Diffurjafna af 1.stigi:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

(x kallast óháð breyta, y háð breyta).

Diffurjafnan er „sjálfstæð“ (autonomous) ef rita má $f(x,y) = g(y)$ svo jafnan verður

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

(þ.e. x kemur ekki beint fyrir í jöfnunni).

<u>Ath:</u> 1. stig vísar til þess að $\frac{dy}{dx}$ er hæsta afleiðan sem fyrir kemur í jöfnunni. Diffurjafna af 2. stigi er:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,\frac{dy}{dx})$$

o.s.frv.
Venjulega er markmiðið að leysa diffurjöfnuna, þ.e. finna fall $y = y(x)$ þ.a.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Hins vegar má fá miklar upplýsingar um lausnarfallið án þess að leysa diffurjöfnuna.

1.5 "Logistic" jafnan

Jafnan

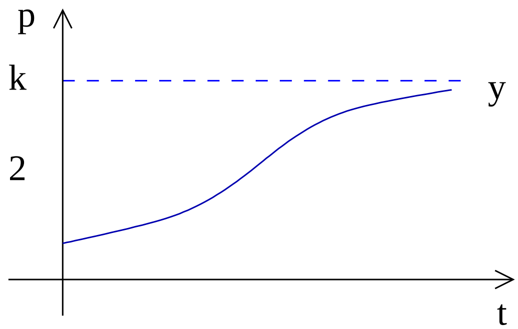
$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

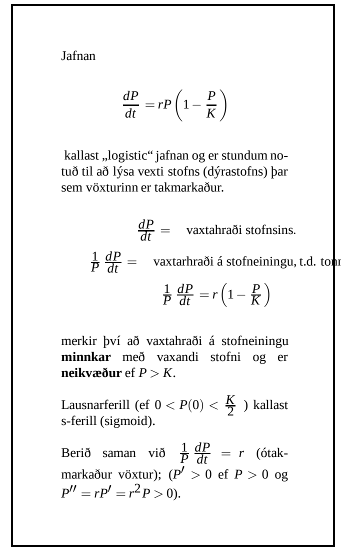
kallast „logistic“ jafnan og er stundum notuð til að lýsa vexti stofns (dýrastofns) þar sem vöxturinn er takmarkaður.

$\frac{dP}{dt} =$ vaxtahraði stofnsins.

$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} =$ vaxtarhraði á stofneiningu, t.d. tonn

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$




Jafnan

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

kallast „logistic“ jafnan og er stundum notuð til að lýsa vexti stofns (dýrastofns) þar sem vöxturinn er takmarkaður.

$\frac{dP}{dt} =$ vaxtahraði stofnsins.

$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} =$ vaxtarhraði á stofneiningu, t.d. tonn

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

merkir því að vaxtahraði á stofneiningu **minnkar** með vaxandi stofni og er **neikvæður** ef $P > K$.

Lausnarferill (ef $0 < P(0) < \frac{K}{2}$) kallast s-ferill (sigmoid).

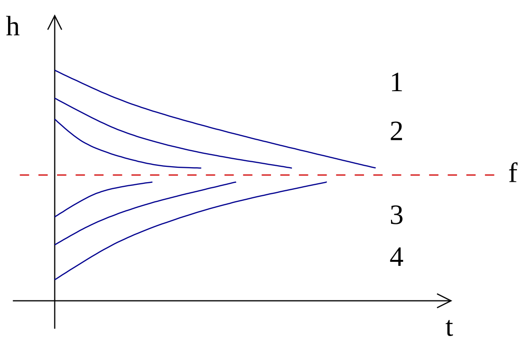
Berið saman við $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = r$ (ótakmarkaður vöxtur); ($P' > 0$ ef $P > 0$ og $P'' = rP' = r^2P > 0$).

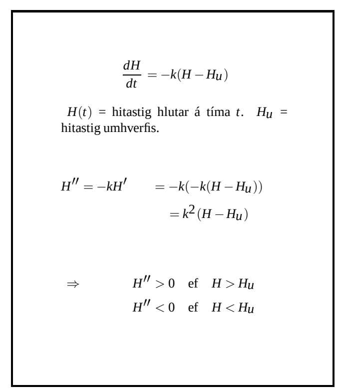
merkir því að vaxtahraði á stofneiningu **minnkar** með vaxandi stofni og er **neikvæður** ef $P > K$.

Lausnarferill (ef $0 < P(0) < \frac{K}{2}$) kallast s-ferill (sigmoid).

Berið saman við $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = r$ (ótakmarkaður vöxtur); ($P' > 0$ ef $P > 0$ og $P'' = rP' = r^2P > 0$).

1.6 Dæmi - hitastig




$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_u)$$

$H(t)$ = hitastig hlutar á tíma t. H_u = hitastig umhverfis.

$$H'' = -kH' = -k(-k(H - H_u)) = k^2(H - H_u)$$

$$\Rightarrow \quad H'' > 0 \text{ ef } H > H_u, \quad H'' < 0 \text{ ef } H < H_u$$

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_u)$$

$H(t)$ = hitastig hlutar á tíma t. H_u = hitastig umhverfis.

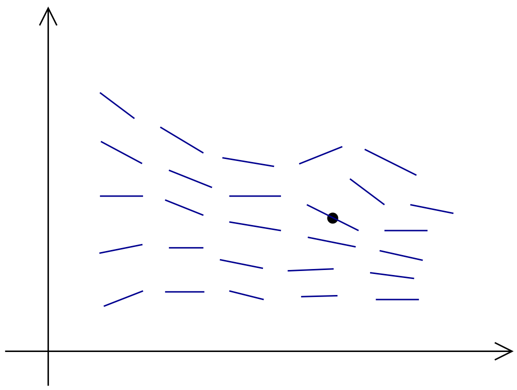
(Hluturinn kólnar hraðar eftir því sem munur á hitastigi hans og hitastigi umhverfisins er meiri).

H_u er jafnvægispunktur: $H' < 0$ ef $H > H_u$; $H' > 0$ ef $H < H_u$.

$$\begin{aligned} H'' = -kH' \quad &= -k(-k(H - H_u)) \\ &= k^2(H - H_u) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{array}{lll} H'' > 0 & \text{ef} & H > H_u \\ H'' < 0 & \text{ef} & H < H_u \end{array}$$

1.7 Hallasvið



Lausnarferill $y' = f(x,y)$ sem gengur í gegnum punkt (x,y) hefur hallatölu $f(x,y)$ í þeim punkti.

Getum teiknað strik með halla $f(x,y)$ í (x,y) fyrir ýmsa punkta (x,y). Fáum hallasvið $y' = f(x,y)$.

Lausnarferill $y' = f(x,y)$ sem gengur í gegnum punkt (x,y) hefur hallatölu $f(x,y)$ í þeim punkti.

Getum teiknað strik með halla $f(x,y)$ í (x,y) fyrir ýmsa punkta (x,y). Fáum hallasvið $y' = f(x,y)$.

Athugum að ef $y(x_0) = y_0$ er upphafsskilyrði, þá má teikna eitt strikanna út frá (x_0, y_0) og það er þá líka nálgun að þeirri sérlausn.

1.8 Verkefni og lausnaraðferðir

Lítum aftur á verkefnið

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Við byrjum á að kanna eiginleika slíkrar diffurjöfnu þegar hún er **sjálfstæð**.
Tveir flokkar diffurjafna verða síðan kannaðir nánar:

- Diffurjöfnur þar sem aðskilja má breyturnar x og y.
- Línulegar diffurjöfnur

Að lokum verða **blöndunardæmi** tekin sérstaklega fyrir.

Jöfnur af gerðinni

$$\frac{dy}{dt} = r(y+A)(y+B)$$

eru notaðar til að lýsa ýmsum fyrirbærum t.d. hraða efnahvarfs, auk stofnvaxtar.

Eins er jafnan

$$\frac{dL}{dt} = r(L_\infty - L)$$

notuð til að lýsa breytingu í lengd fiska, o.fl. Við getum kannað eiginlega jöfnunnar og líka leyst þessa tilteknu jöfnu.

Við byrjum á því í næsta kafla að kanna eiginleika diffurjöfnunnar þegar hún er **sjálfstæð**.

Verkefnið verður síðan að **leysa** diffurjöfnur af gerðinni

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

Lítum sérstaklega á tvenns konar jöfnur

- Diffurjöfnur þar sem aðskilja má breyturnar x og y.
- Línulegar diffurjöfnur

2 Sjálfstæðar diffurjöfnur

2.1 Sjálfstæða diffurjafnan

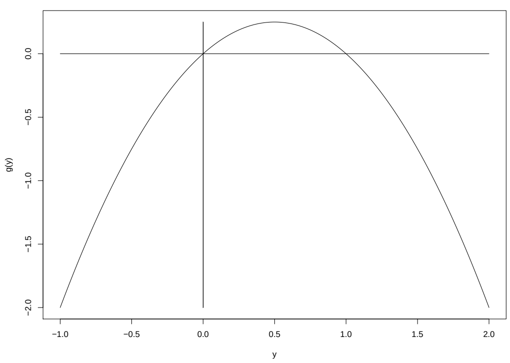


Figure 1: $g(y) = y(1-y)$ vs y

Diffurjafna er sjálfstæð ef hún er af gerðinni

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

Skilgreining: Diffurjafna er **sjálfstæð** ef rita má

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

Margar diffurjöfnur eru sjálfstæðar og því er gagnlegt að kynna sér afleiðingar þess.

Dæmi: Algeng diffurjafna í líffræði er

$$\frac{dy}{dx} = ry(1-\frac{y}{K})$$

Þessi jafna er oft notuð til að lýsa framleiðslu dýrastofns sem ekki er veiddur. Þá er $y = y(t)$ lífmassi stofnsins á tíma t og $\frac{dy}{dx}$ er þá framleiðsla stofnsins (nýliðun+vöxtur-náttúruleg afföll).

Meðal lausna eru föllin $y \equiv 0$ og $y \equiv K$ (m.ö.o. $y(x) = 0$, $\forall x$ er lausn á diffurjöfnunni og sömuleiðis $y(x) = K$, $\forall x$).

Dæmi:

$$\frac{dy}{dx} = y(1-y)$$

2.2 Jafnvægi sjálfstæðrar diffurjöfnu

Gildi á y þ.a. $g(y) = 0$ kallast **jafnvægis-** eða **kyrrstöðupunktar** sjálfstæðrar diffurjöfnu

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

Ef upphafsgildi diffurjöfnu, $y_0 = y(x_0)$ er þannig að $g(y_0) = 0$, þá er y í jafnvægi eða kyrrstöðu, þ.e. breytist ekki.

Skilgreining: Gildi á y þ.a. $g(y) = 0$ kallast **jafnvægis-** eða **kyrrstöðupunktar** sjálfstæðu diffurjöfnunnar

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

<u>Ath:</u>

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{ef} \qquad g(y) = 0$$

því er y í jafnvægi eða kyrrstöðu, þ.e. breytist ekki.

Ef upphafsgildi diffurjöfnu, $y_0 = y(x_0)$ er þannig að $g(y_0) = 0$, þá er y í jafnvægi eða kyrrstöðu, þ.e. y er fast í $y = y_0$ fyrir öll x. Við sjáum raunar við nánari skoðun að $y'' = g'(y)y' = g'(y)g(y)$ svo ef $g(y_0) = 0$, þá er $y''(x_0) = 0$ svo um allar afleiður gildir $y^{(n)}(x_0) = 0$.

Dæmi:

$$\frac{dy}{dx} = ry(1 - \frac{y}{K})$$

Hér eru jafnvægispunktar $y = 0$ og $y = K$.

<u>Dæmi:</u>

$$\frac{dy}{dx} = y(1-y)$$

Jafnvægispunktar eru $y = 0$ og $y = 1$; þar er $y' = 0$.

2.3 Stöðug og óstöðug jafnvægi; fasalínur

Lausn $y' = g(y)$ getur leitað í átt að jafnvægi eða frá því.
Stöðugt jafnvægi: Lausn leitar í átt að jafnvægispunktinum
Óstöðugt jafnvægi: Lausn leitar frá jafnvægispunktinum

Lausn sjálfstæðrar diffurjöfnu, $y' = g(y)$, getur leitað í átt að jafnvægispunkti $y_0 = y(x_0)$ eða frá honum.

Stöðugt jafnvægi: Lausn leitar í átt að jafnvægispunktinum.

Óstöðugt jafnvægi: Lausn leitar frá jafnvægispunktinum.

Ef $y^* = y(x^*)$ er jafnvægispunktur og upphafsstaðan $y_0 = y(x_0)$ er nálægt y^*, þá laitar fallið y að $y*$ ef um stöðugt jafnvægi er að ræða, en annars frá því. Oftast er x tími í þessum dæmum og oftast er því verið að ræða um að $lim_{x\to\infty} y(t) = y^*$ ef $y(x_0)$ er nálægt stöðugum jafnvægispunkti y^*.

Lítum einnig á $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}g(y) = g'(y)y' = g'(y)g(y)$.

Dæmi:

$$\frac{dy}{dx} = y(1-y)$$

Jafnvægispunktar eru $y = 0$ og $y = 1$; þar er $y' = 0$.

Finnum svo bilin þar sem $y' > 0$ og $y' < 0$.
Þetta þýðir að ef $y < 0$ þá minnkar $y(x)$ (því $\frac{dy}{dx} < 0$);
ef $0 < y < 1$ þá vex $y(x)$ (því $y' > 0$); og $y(x)$ minnkar ef $y > 1$ ($y' < 0$).

Getum nú dregið ályktanir um eðli jafnvægispunktanna.

Ath: Lausn sem tekur (fyrir eitthvert x) gildi $y > 0$ nálgast jafnvægispunktinn $y = 1$. (Lausnarferlar sem „byrja“, ef x er tími, í $y > 0$ stefna á láréttu aðfelluna $y = 1$).
Lausn sem tekur gildi $y < 0$ stefnir á $-\infty$.

Ath: $y = 0$ og $y = 1$ voru jafnvægispunktar. Hins vegar nálgast lausnir $y = 1$, en fjarlægjast $y = 0$. Við segjum að $y = 1$ sé **stöðugur** (stable) jafnvægispunktur, en $y = 0$ **óstöðugur** (unstable).

Dæmi:

$$\frac{dy}{dx} = ry(1 - \frac{y}{K})$$

Hér eru jafnvægispunktar $y = 0$ og $y = K$.

Skoðum hvar $\frac{dy}{dx} = 0$, hvar $\frac{dy}{dx} > 0$ og hvar $\frac{dy}{dx} < 0$ og drögum ályktanir um, hvaða jafnvægi er stöðugt og hver eru óstöðug.

2.4 Lausnarferlar

Getum rissað lausnarferla sjálfstæðrar diffurjöfnu

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

Rannsökum fallið g til að kortleggja afleiðuna $\frac{dy}{dx}$ og diffrum jöfnuna (finnum y'') til að finna vendipunkta ferlanna.
Notum formerki g og/eða aðra afleiðu y til að rannsaka stöðugleika.

Dæmi:

$$\frac{dy}{dx} = ry(1 - \frac{y}{K})$$

með jafnvægispunktana $y = 0$ og $y = K$.

Athugum nú hvernig hægt er að teikna lausnarferil $\frac{dy}{dx} = g(y)$ (lauslega).

Skoðum hvar $\frac{dy}{dx} = 0$, hvar $\frac{dy}{dx} > 0$ og hvar $\frac{dy}{dx} < 0$.

Lítum síðan á $\frac{d^2y}{dx^2}$ til að finna vendipunkta.

Dæmi:

$$\frac{dy}{dx} = y(1-y)$$

með jafnvægispunktar $y = 0$ og $y = 1$ þar sem $y' = 0$.

Finnum svo bilin þar sem $y' > 0$ og $y' < 0$.
Þetta þýðir að ef $y < 0$ þá minnkar $y(x)$ (því $\frac{dy}{dx} < 0$);
ef $0 < y < 1$ þá vex $y(x)$ (því $y' > 0$); og $y(x)$ minnkar ef $y > 1$ ($y' < 0$).

Við sjáum því að fyrir $y > 0$ þá mun lausnarferillinn nálgast $y = 1$. Til að fá fram sveigju lausnarferla þurfum við að skoða y''.

$$\begin{aligned} y' &= y(1-y) \qquad \Rightarrow \\ y'' &= y'(1-y) + y(-y') \\ &= y' - 2yy' \\ &= y'(1-2y) \\ &= y(1-y)(1-2y) \end{aligned}$$

Höfum nú nægar upplýsingar til að rissa nokkra lausnarferla.

Ath: Lausn sem tekur gildi $y > 0$ nálgast jafnvægispunktinn $y = 1$. (Lausnarferlar sem „byrja“, ef x er tími, í $y > 0$ stefna á láréttu aðfelluna $y = 1$).

Lausn sem einhvers staðar (fyrir eitthvert x) tekur gildi $y < 0$ stefnir á $-\infty$.

Ath: $y = 0$ og $y = 1$ voru jafnvægispunktar. Hins vegar nálgast lausnir $y = 1$, en fjarlægjast $y = 0$. Við segjum að $y = 1$ sé **stöðugur** (stable) jafnvægispunktur, en $y = 0$ **óstöðugur** (unstable).

3 Aðskilnaður breytistærða

3.1 1. stigs diffurjöfnur þar sem aðskilja má breytur

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y) \qquad (\, f(x,y) = g(x)h(y)\,)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) \qquad (\,\text{ef}\, h \neq 0\,)$$

(þetta köllum við að aðskilja breyturnar)

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{1}{h(y)}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)dx$$

(finnum stofnfall m.t.t. x)

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx$$

síðan þarf að finna stofnföllin og leysa fyrir $y(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y) \qquad (\, f(x,y) = g(x)h(y)\,)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) \qquad (\,\text{ef}\, h \neq 0\,)$$

(þetta köllum við að aðskilja breyturnar)

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{1}{h(y)}\cdot\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)dx$$

Dæmi:

$$
\begin{aligned}
& & y' &= ry\left(1-\tfrac{y}{k}\right) \\
&\Rightarrow & \frac{1}{y\left(1-\frac{y}{k}\right)}\frac{dy}{dx} &= r \\
&\Rightarrow & \int \frac{1}{y\left(1-\frac{y}{k}\right)}dy &= \int r\,dx \\
&\Rightarrow & \int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{k\left(1-\frac{y}{k}\right)}\right)dy &= \int r\,dx \\
&\Rightarrow & \ln|y|-\ln|k-y| &= rx+\hat{C} \\
&\Rightarrow & \ln\left|\frac{y}{k-y}\right| &= rx+\hat{C} \\
&\Rightarrow & \left|\frac{y}{k-y}\right| &= Ce^{rx} \qquad (C=e^{\hat{C}})
\end{aligned}
$$

Ef við gerum ráð fyrir að $y(0)=y_0$ þá má ákvarða gildið á C:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{y_0}{k-y_0} &= C \\
& & y &= C(k-y)e^{rx} \\
&\Rightarrow & y+Cye^{rx} &= C\cdot ke^{rx} \\
&\Rightarrow & y(x) &= \frac{C\cdot ke^{rx}}{1+Ce^{rx}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{\frac{y_0}{k-y_0}ke^{rx}}{1+\frac{y_0}{k-y_0}\cdot e^{rx}} \\
&= \frac{y_0\cdot ke^{rx}}{k-y_0+y_0e^{rx}} \\
&= \frac{y_0Ke^{rx}}{k+(e^{rx}-1)y_0}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \qquad y(x) = \frac{y_0\cdot k}{y_0+(k-y_0)e^{-rx}}
$$

(ath. $y(x)\to k, \quad x\to\infty$).

3.2 Dæmi

$$
\boxed{
\begin{aligned}
& & \frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y} \\
&\Rightarrow & y\frac{dy}{dx} &= x \\
&\Rightarrow & \int y\,dy &= \int x\,dx \\
&\Rightarrow & \tfrac{1}{2}y^2+\hat{C} &= \tfrac{1}{2}x^2 \\
&\Rightarrow & x^2+y^2 &= c
\end{aligned}
}
$$

1.

$$
\begin{aligned}
& & \frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y} \\
&\Rightarrow & y\frac{dy}{dx} &= x \\
&\Rightarrow & \int y\,dy &= \int x\,dx \\
&\Rightarrow & \tfrac{1}{2}y^2+\hat{C} &= \tfrac{1}{2}x^2 \\
&\Rightarrow & x^2+y^2 &= c
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{dy}{dx} = a\tfrac{y}{x} \\
\Rightarrow \quad & \int \tfrac{1}{y}\, dy = \int \tfrac{a}{x}\, dx \\
\Rightarrow \quad & \ln y = \ln x^a + \hat{C} \\
\Rightarrow \quad & y = C \cdot x^a
\end{aligned}
$$

3.

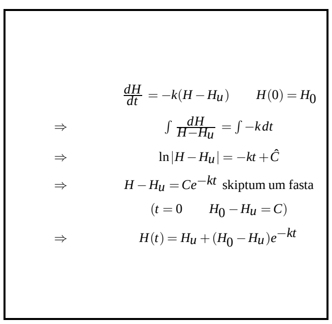
$$
\begin{aligned}
& \tfrac{dy}{dx} = k \cdot y \\
\Rightarrow \quad & \int \tfrac{1}{y}\, dy = \int k\, dx \\
\Rightarrow \quad & \ln y = kx + \hat{C} \\
\Rightarrow \quad & y(x) = Ce^{kx}
\end{aligned}
$$

$(y(x_0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = Ce^{kx_0} \qquad \Rightarrow C = y_0 e^{-kx_0}\ )$

$$y(x) = y_0 e^{k(x-x_0)}$$

Veldisvísisvöxtur ef $k > 0$, en veldisvísishnignun ef $k < 0$.
($\frac{dy}{dt} = ky \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 e^{kt}$ ef $y(0) = y_0$, t er tími).

3.3 Dæmi um kælingu



Dæmi: Lítum á líkan sem lýsir kælingu.

Gerum ráð fyrir að hitanum H á tíma t sé lýst með diffurjöfnu af gerðinni

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_u)$$

og að auki er gefið að kerfið uppfylli byrjunarskilyrði $H(0) = H_0$, þ.e.a.s. hitastig við tímann $t = 0$ er gefið.

Þessar upplýsingar má nota til að leysa diffurjöfnuuna með aðskilnaði breytistærða:

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{dH}{dt} = -k(H - H_u) \qquad H(0) = H_0 \\
\Rightarrow \quad & \int \tfrac{dH}{H - H_u} = \int -k\, dt \\
\Rightarrow \quad & \ln|H - H_u| = -kt + \hat{C} \\
\Rightarrow \quad & H - H_u = Ce^{-kt} \\
& (t = 0 \qquad H_0 - H_u = C) \\
\Rightarrow \quad & H(t) = H_u + (H_0 - H_u)e^{-kt}
\end{aligned}
$$

Athugið að hér gildir

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = H_u$$

sem er í samræmi við greiningu á hegðun upphaflegu diffurjöfnunnar, ef við lítum á, hvað hún er í jafnvægi og sjáum þá að $H = H_u$ er stöðugt jafnvægi.

4 Línulegar diffurjöfnur af 1.stigi

4.1 Línulegar diffurjöfnur af 1.stigi

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Til að leysa þessa jöfnu skulum við margfalda með falli $v(x)$, ($v(x) \geq 0$).

<u>Ath:</u> Aðeins er hægt að aðskilja breytur í undantekningartilvikum.

$$v(x)\frac{dy}{dx} + P(x)v(x)y(x) = Q(x)\cdot v(x)$$

Nú ætlum við að velja v þ.a. vinstri hlið jöfnunnar megi skrifa:

$$\frac{d}{dx}(v(x)\cdot y(x))$$

sem er jafnt

$$v\frac{dy}{dx} + \frac{dv}{dx}\cdot y$$

Þetta þýðir að

$$\begin{aligned} & v'(x) = P\cdot v \\ \Rightarrow \quad & v(x) = e^{\int P(x)\,dx} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} & \textstyle\int \frac{dv}{v} = \int P(x)\,dx \\ \Rightarrow \quad & \ln v = \textstyle\int P(x)\,dx + \hat{C} \\ \Rightarrow \quad & v = e^{\int P(x)\,dx}\cdot c, \quad \text{veljum svo } c = 1 \end{aligned}\right)$$

$v(x)$ kallast tegrunarþáttur (integration factor).
Ef $v = e^{\int P\,dx}$ þá verður diffurjafnan

$$\begin{aligned} & \tfrac{d}{dx}(v\cdot y) = Q\cdot v \\ \Rightarrow \quad & y(x) = \tfrac{1}{v(x)}\textstyle\int v(x)Q(x)\,dx \\ & \left(v(x) = e^{\int P(x)\,dx}\right) \end{aligned}$$

4.2 Dæmi

$$
\begin{aligned}
& x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x \\
& \text{þ.e.} \quad P(x) = -\frac{3}{x}, \quad Q(x) = x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{-\int \frac{3}{x}\,dx} = e^{-3\ln x} \\
= e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad y(x) &= \frac{1}{v(x)} \int x \cdot \frac{1}{x^3}\,dx \\
&= x^3 \int x^{-2}\,dx \\
&= x^3 \cdot \left(-x^{-1} + C\right) \\
&= Cx^3 - x^2 \qquad (x > 0)
\end{aligned}
$$

<u>Dæmi:</u>

$$
\begin{aligned}
& x\frac{dy}{dx} = x^2 + 3y, \qquad x > 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x \\
& \text{þ.e.} \quad P(x) = -\frac{3}{x}, \quad Q(x) = x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{-\int \frac{3}{x}\,dx} = e^{-3\ln x} \\
= e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad y(x) &= \frac{1}{v(x)} \int x \cdot \frac{1}{x^3}\,dx \\
&= x^3 \int x^{-2}\,dx \\
&= x^3 \cdot \left(-x^{-1} + C\right) \\
&= Cx^3 - x^2 \qquad (x > 0)
\end{aligned}
$$

Athugið að ekki má sleppa úr stuðlinum C þegar stofnfallið er fundið.

Ef byrjunarskilyrði eru gefin, t.d. $y(1) = 2$, má ákvarða C:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= Cx^3 - x^2 \\
y(1) &= C - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 3 \\
y(x) &= 3x^3 - x^2
\end{aligned}
$$

5 Blöndun

5.1 Rúmmál, massi og styrkur

- Rúmmál: Kar af rúmmáli V inniheldur vatn.
  - Einingar: rúmmetrar, lítrar, rúmsentímetrar, millilítrar, rúmdesimetrar
- Massi: Í vatninu er salt með massann M.
  - Mælieining: kg, tonn, g
- Styrkur: Blandan er af styrk C.
  - Mælieiningar: kg/l, kg/m^3, g/l
- Rennsli: Inn í karið eða úr því rennur vökvi með hraðanum q.
  - Mælieiningar: l/s, m^3/klst, l/mín

Í þessum kafla verður fjallað um ”blöndun”. Slík verkefni eru áhugaverð á mjög mörgum sviðum, ekki síst sameindalíffræði og lyfjafræði.

Verkefnið er eftirfarandi:

Höfum kar sem sem inniheldur tiltekið rúmmál, V, af vökva (V=”volume”), en V er mælt í rúmmálseiningum s.s. lítrum, l.

Í vökvanum er uppleyst eitthvert magn, M, efnis (M=”mass”), en efnið er mælt í þyngdar- eða massaeiningum s.s. kg.

Styrkur lausnarinnar er þá $C = M/V$, kg/l (C=”concentration”, mælt í massa-per-rúmmálseiningum)

Inn í karið flæðir síðar vökvi af sömu gerð en með öðrum styrk, á einhverjum hraða.

Í karinu blandast vökvinn fullkomnlega.

Út úr karinu rennur fullblandaður vökvi vökvi á einhverjum hraða.

Þetta verkefni verður leyst í kaflanum, en við byrjum á einfaldri blöndun.

Dæmi: 100 l af vökva innihalda vatn með 1kg af salti. Styrkurinn er ...

Dæmi: Breytið einingunum í rúmmetra og grömm.

Dæmi: Rennsli er 2 l/s. Breytið einingunni í m^3/klst.

5.2 Einföld blöndun

Kar inniheldur V l af vökva (V="volume"; rúmmálseiningar)
Uppleyst efni, M kg (M="mass"; þyngd/massi)
Styrkur $C = M/V$, kg/l (C="concentration")
Í karinu blandast vökvinn fullkomnlega.
Út úr karinu rennur fullblandaður vökvi á einhverjum hraða.
Inn í karið flæðir (samtímis eða síðar) vökvi, á einhverjum hraða.
Leysum þetta verkefni á nokkrum síðum...byrjum á einfaldri blöndun.

Þegar litið er á hugtök eins og massa, rúmmál, styrk og rennsli er mikilvægt að gera grein fyrir öllum einingum sem eru notaðar.

Dæmi: 100 l af vökva innihalda vatn með 1kg af salti. Styrkurinn er ...

Bætum nú 100l af hreinu vatni saman við og fáum nýjan styrk...

Dæmi: 100 l af vökva innihalda vatn með 1kg af salti. Styrkurinn er ...

Bætum nú 10l af hreinu vatni saman við og fáum nýjan styrk...

Töppum af 10l og fáum nýtt heildarmagn af salti...

Dæmi: 100 l af vökva innihalda vatn með 1kg af salti. Styrkurinn er ...

Töppum af 10l og fáum nýtt heildarmagn af salti og en óbreyttan styrk...

Bætum nú 10l af vatni með 100g af salti saman við, fáum nýtt heildarmagn af salti og breyttan styrk...
Röðin skiptir máli

Dæmi: 100 l af vökva innihalda vatn með 1kg af salti. Styrkurinn er ...

Bætum nú 10l af vatni með 100g af salti saman við, fáum nýtt heildarmagn af salti og breyttan styrk...

Töppum af 10l og fáum nýtt heildarmagn af salti og en óbreyttan styrk...**Röðin skiptir máli**

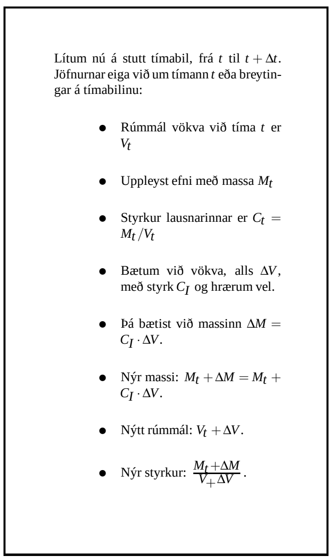
5.3 Jöfnur fyrir blöndun

- Höfum kar sem sem inniheldur V l af vökva (V="volume", í rúmmálseiningum s.s. l)
- Í vökvanum er uppleyst efni, alls M kg (M="mass", í þyngdar/massa-einingum s.s. kg)
- Styrkur lausnarinnar er þá $C = M/V$, kg/l (C="concentration", mælt í massa-per-rúmmálseiningum)
- Bætum við vökva, alls v, með styrk c og hrærum vel. Þá bætist við massinn $m = cv$.
- Nýr massi: $M + m$.
- Nýtt rúmmál: $V + v$.
- Nýr styrkur: $\frac{M+m}{V+v}$.

- Höfum kar sem sem inniheldur V l af vökva (V=”volume”, í rúmmálseiningum s.s. l)
- Í vökvanum er uppleyst efni, alls M kg (M=”mass”, í þyngdar/massa-einingum s.s. kg)
- Styrkur lausnarinnar er þá $C = M/V$, kg/l (C=”concentration”, mælt í massa-per-rúmmálseiningum)
- Bætum við vökva, alls v, með styrk c og hrærum vel. Þá bætist við massinn $m = cv$.
- Nýr massi: $M + m$.
- Nýtt rúmmál: $V + v$.
- Nýr styrkur: $\frac{M+m}{V+v}$.

Dæmi: ...

5.4 Lítum á stutt tímabil...



Lítum nú á stutt tímabil, frá t til $t + \Delta t$. Jöfnurnar eiga við um tímann t eða breytingar á tímabilinu:

- Rúmmál vökva við tíma t er V_t
- Uppleyst efni með massa M_t
- Styrkur lausnarinnar er $C_t = M_t/V_t$
- Bætum við vökva, alls ΔV, með styrk C_I og hrærum vel.
- Þá bætist við massinn $\Delta M = C_I \cdot \Delta V$.
- Nýr massi: $M_t + \Delta M = M_t + C_I \cdot \Delta V$.
- Nýtt rúmmál: $V_t + \Delta V$.
- Nýr styrkur: $\frac{M_t+\Delta M}{V_+\Delta V}$.

5.5 Stutt tímabil: Tekið út og bætt við

Lítum nú á stutt tímabil, frá t til $t+\Delta t$.

- Kar með V_t l af vökva (V_t=”volume”,rúmmál)
- Uppleyst efni, alls M_t kg (M_t=”mass”, þyngd/massi)
- Styrkur lausnarinnar er þá $C_t = M_t/V_t$, kg/l (C_t=”concentration”, massi-per-rúmmál)
- Tökum út blöndu, alls ΔV, með styrk C_t. Þá fer út massinn $C_t \cdot \Delta V$
- Bætum við **jafnmiklum** vökva, alls ΔV, með styrk C_I og hrærum vel. Þá bætist við massinn $C_I \cdot \Delta V$.
- Massabreyting: $\Delta M = C_I \cdot \Delta V - C_t \cdot \Delta V$.
- Nýr massi: $M_t + \Delta M$.
- Jafnt flæði inn og út: Óbreytt rúmmál.
- Nýr styrkur: $\frac{M_t+\Delta M}{V}$.

Lítum nú á stutt tímabil, frá t til $t+\Delta t$.

- Kar með V_t l af vökva (V_t=”volume”,rúmmál)
- Uppleyst efni, alls M_t kg (M_t=”mass”, þyngd/massi)
- Styrkur lausnarinnar er þá $C_t = M_t/V_t$, kg/l (C_t=”concentration”, massi-per-rúmmál)
- Tökum út blöndu, alls ΔV, með styrk C_t. Þá fer út massinn $C_t \cdot \Delta V$
- Bætum við **jafnmiklum** vökva, alls ΔV, með styrk C_I og hrærum vel. Þá bætist við massinn $C_I \cdot \Delta V$.
- Massabreyting: $\Delta M = C_I \cdot \Delta V - C_t \cdot \Delta V$.
- Nýr massi: $M_t + \Delta M$.
- Jafnt flæði inn og út: Óbreytt rúmmál.
- Nýr styrkur: $\frac{M_t+\Delta M}{V}$.

Verkefni: Skrifið niður allar einingarnar í jöfnu sem lýsir massabreytingu. Hver er t.d. einingin á $\frac{\Delta M}{\Delta t}$?

5.6 Rennsli og rúmmálsbreyting

Rúmmál í upphafi: V_0
Rennsli inn: q_I
Stuttur tími: $\Delta V = q_I \cdot \Delta t - q_O \Delta t$
– muna að ath einingar
– einfalt: finnum stofnfall
Lausn: $V_t = \ldots$

Rúmmál á tíma t: V_t
Rennsli út: q_O
Diffurjafna: $\frac{dV}{dt} = q_I - q_O$

Rúmmál í upphafi: V_0	Rúmmál á tíma t: V_t
Rennsli inn: q_I	Rennsli út: q_O
Stuttur tími: $\Delta V = q_I \cdot \Delta t - q_O \Delta t$	Diffurjafna: $\frac{dV}{dt} = q_I - q_O$

– muna að ath einingar

– einfalt: finnum stofnfall

Lausn: $V_t = \ldots$

Verkefni: (i) Finnið stofnfallið; (ii) Leysið diffurjöfnuna með upphafsskilyrði (iii) Lausnin er augljós - hvers vegna?

Hverjar eru einingarnar á öllum stærðum í dæminu? Passa þær m.v. diffurjöfnuna? En lausnina?

Farið yfir einingarnar ef $V_0 = 100l$, $q_I = 2l/s$, $q_O = 1l/s$ og Δt er mælt í sek.

Farið yfir einingarnar ef $V_0 = 3.6m^3$, $q_I = 1l/s$, $q_O = 2l/s$ og Δt er mælt í klst.

Hvenær tæmist 100l tankur sem úr renna 2l/sek og inn 4l/sek?

Hve hratt fyllist tómur tankur ef er látið renna inn 3l/sek og út 2l/sek.

5.7 Rennsli og massi

Hugsum um rennsli: Rennsli inn, q_I, t.d. í l/s. Rennsli út, q_O, t.d. í l/s. Oft er $q_I = q_O$, en ekki alltaf.ATH: V breytist ef $q_I \neq q_O$
Á tímanum Δt renna inn $q_I \Delta t$ og út $q_O \Delta t$.
Ef styrkurinn inn er C_I, þá rennur inn massinn $q_I \cdot C_I \Delta t$.
Út rennur massinn $q_O \cdot C \Delta t$.
Massabreytingin (nálgun á stuttum tíma) $\Delta M = q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C \Delta t = (q_I \cdot C_I - q_O \cdot C) \Delta t$

Hugsum um rennsli: Rennsli inn, q_I, t.d. í l/s. Rennsli út, q_O, t.d. í l/s. Oft er $q_I = q_O$, en ekki alltaf.ATH: V breytist ef $q_I \neq q_O$

Á tímanum Δt renna inn $q_I \Delta t$ og út $q_O \Delta t$.

Ef styrkurinn inn er C_I, þá rennur inn massinn $q_I \cdot C_I \Delta t$.

Út rennur massinn $q_O \cdot C \Delta t$.

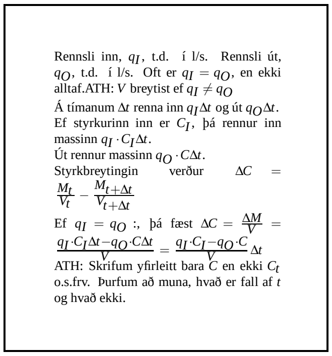
Massabreytingin (nálgun á stuttum tíma) $\Delta M = q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C \Delta t = (q_I \cdot C_I - q_O \cdot C) \Delta t$

Verkefni: Farið yfir einingarnar.

Athugið að massabreytingin er **nálgun** og gildir bara þegar Δt er stutt tímabil. Hvers vegna er þetta bara nálgun og hvers vegna er það áhugavert?

Ef útflæðið er á undan innflæðinu (ekki samtímis), þá er þetta rétt jafna fyrir massabreytingu. Hvers vegna?

5.8 Rennsli og styrkur



Rennsli inn, q_I, t.d. í l/s. Rennsli út, q_O, t.d. í l/s.

Oft er innflæði jafnt útflæði, þ.e. $q_I = q_O$, en alls ekki alltaf. **Munum þá** að rúmmálið, V, breytist ef $q_I \neq q_O$.

Á tímabili af lengd Δt renna þá inn $q_I\Delta t$ rúmmálseiningar og út $q_O\Delta t$.

Ef styrkurinn inn er C_I, þá rennur inn massinn $q_I \cdot C_I\Delta t$ á stutta tímabilinu.

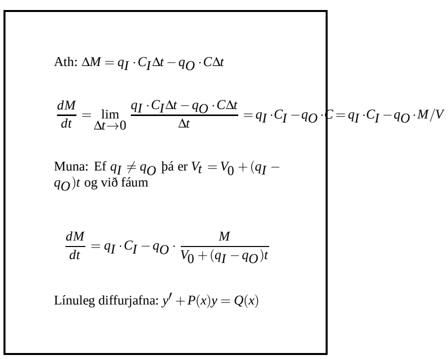
Út rennur massinn $q_O \cdot C\Delta t$ (og við munum að þetta er nálgun því styrkurinn breytist stöðugt).

Styrkbreytingin verður $\Delta C = \frac{M_t}{V_t} - \frac{M_{t+\Delta t}}{V_{t+\Delta t}}$

Ef $q_I = q_O$:, þá fæst $\Delta C = \frac{\Delta M}{V} = \frac{q_I \cdot C_I\Delta t - q_O \cdot C\Delta t}{V} = \frac{q_I \cdot C_I - q_O \cdot C}{V}\Delta t$

ATH: Skrifum yfirleitt bara C en ekki C_t o.s.frv. Þurfum að muna, hvað er fall af t og hvað ekki.

5.9 Massabreyting per tímaeiningu



Við byrjum með jöfnuna fyrir breytingu í massa á stuttri tímaeiningu, þ.e. $\Delta M = q_I \cdot C_I\Delta t - q_O \cdot C\Delta t$ og síðan breytum við henni í diffurjöfnu:

$$\frac{dM}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q_I \cdot C_I\Delta t - q_O \cdot C\Delta t}{\Delta t} = q_I \cdot C_I - q_O \cdot C = q_I \cdot C_I - q_O \cdot M/V$$

Muna: Ef $q_I \neq q_O$ þá er $V_t = V_0 + (q_I - q_O)t$ og við fáum

$$\frac{dM}{dt} = q_I \cdot C_I - q_O \cdot \frac{M}{V_0 + (q_I - q_O)t}$$

Línuleg diffurjafna: $y' + P(x)y = Q(x)$

Verkefni: Skrifið upp mismunandi dæmi, t.d. með sama eða mismunandi inn- og útflæði. Prófið mismunandi mælieiningar.

Byrjið t.d. með eftirfarandi: Kar inniheldur 100l af vökva, sem í eru 12kg af salti. Í karið renna 2l/sek af hreinu vatni og úr því renna 2l/sek af blöndu. Diffurjafna sem lýsir styrk verður...

Leysið dæmin.

5.10 Styrkbreyting per tímaeiningu

Ath ef V er fasti, þ.e. $q_I = q_O = q$:

$\Delta C = \frac{M_t}{V} - \frac{M_{t+\Delta t}}{V} = \frac{\Delta M}{V} = \frac{q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C\Delta t}{V} = q \cdot \frac{(C_I - C)\Delta t}{V}$

$\frac{dC}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C\Delta t}{V}}{\Delta t} = \frac{q_I}{V}(C_I - C)$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{dC}{dt}}_{y'} = \underbrace{\frac{q_I \cdot C_I}{V}}_{a} - \underbrace{\frac{q_O}{V}}_{b} \cdot \underbrace{C}_{y} = \frac{q}{V}(C_I - C)$

Línuleg diffurjafna: $y' = a + by$, en líka sjálfstæð og hér má aðskilja breytistærðir.

Athugum nú, hvað gerist ef rúmmálið V er fasti, þ.e. innflæðið er jafnt útflæðinu $q_I = q_O = q$.

Þá fæst mun einfaldari lýsing á því, hvernig styrkurinn breytist á tímabili af lengd Δt. Við byrjum á að skrifa upp grunnjöfnu sem lýsir breytingu á styrk:

$$\Delta C = \frac{M_t}{V} - \frac{M_{t+\Delta t}}{V}$$

Munum þá að styrkur er bara massi deilt með rúmmáli og umritum þá jöfnuna

$$\Delta C = \frac{\Delta M}{V} = \frac{q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C\Delta t}{V}$$

og þá getum við dregið saman liðina á eftirfarandi hátt:

$$\Delta C = q \cdot \frac{(C_I - C)\Delta t}{V}$$

Þetta getum við umritað sem diffurjöfnu með því að taka markgildin:

$$\frac{dC}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C\Delta t}{V}}{\Delta t} = \frac{q_I}{V}(C_I - C)$$

Með því að merkja betur liðina sjáum við betur eðli diffurjöfnunnar:

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dC}{dt}}_{y'} = \underbrace{\frac{q_I \cdot C_I}{V}}_{a} - \underbrace{\frac{q_O}{V}}_{b} \cdot \underbrace{C}_{y} = \frac{q}{V}(C_I - C)$$

Þetta er þá línuleg diffurjafna, þ.e. jafna af gerðinni $y' = a + by$. Hún er raunar líka sjálfstæð (tíminn t kemur ekki fyrir nema í gegnum y) og hér má líka aðskilja breytistærðir til að leysa jöfnuna.

Verkefni: Setjið upp dæmi með tölum (muna að hafa innflæði=útflæði). Leysið síðan dæmin.

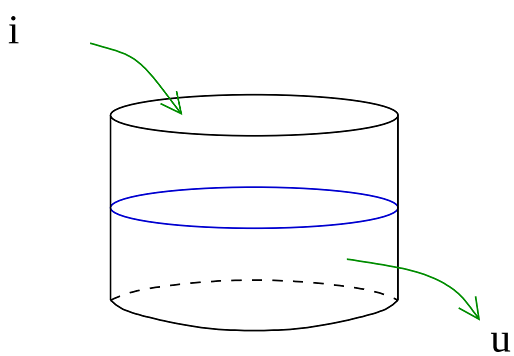
Verkefni: Skrifið upp almennu lausn diffurjöfnunnar.

Byrjið t.d. með eftirfarandi: Kar inniheldur 100l af vökva, sem í eru 12kg af salti. Í karið renna 2l/sek af hreinu vatni og úr því renna 2l/sek af blöndu. Diffurjafna sem lýsir styrk verður...

5.11 Lausn massajöfnunnar

> Jafna sem lýsir massabreytingu (magn af efni í lausninni) er ekki háð forsendu um að innflæði og útflæði sé jafnt.
> Getum leyst diffurjöfnuna...

5.12 Dæmi um tank sem tæmist



> Viljum lýsa því hvernig styrkur efnis í lausn breytist.
>
> Vökva með uppleystu efni er dælt í tank með ákveðnum hraða. Síðan er vökva hleypt úr tankinum með gefnum hraða.
> Hraði breytinga á styrk = [hraði inn] - [hraði út]

Viljum lýsa því hvernig styrkur efnis í lausn breytist.

Vökva með uppleystu efni er dælt í tank með ákveðnum hraða. Síðan er vökva hleypt úr tankinum með gefnum hraða.
Hraði breytinga á styrk = [hraði inn] - [hraði út]

Dæmi: Tankur með $100l$ af vatni. Lausn með $1g/l$ af uppleystu efni er dælt í tankinn með hraða $1l/$mín. Blöndunni er dælt út með hraða $3l/$mín. Finnum diffurjöfnu sem lýsir því hvernig magn uppleysta efnisins í tanknum breytist með tíma og leysum hana:
Látum $x(t)$ vera magn efnisins (í g) í tanknum á tíma t og $V(t)$ vera rúmmál vökva í tanknum á tíma t.

Hraði inn: 1 g/l ·1 l/mín = 1 g/mín

Ath: $\frac{x(t)}{V(t)}$ = magn(g)/lítra í blöndunni

Hraði út:

$$\frac{x(t)}{V(t)} \cdot \underbrace{3l/m}_{\text{hraði út á blöndu}}$$

Ath: $\frac{x}{v} \cdot 3l/$mín $\quad : g/l \cdot l/\text{mín} = g/\text{mín}$.

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{x}{V} \cdot 3$$

Jafna fyrir $V(t)$:

$$V(t) = 100\,l - 3l/\text{mín} \cdot t\text{mín} + 1l/\text{mín} \cdot t\text{mín}$$

þ.e.

$$V(t) = 100 - 2t$$
$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{3x}{100-2t} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{100-2t} = 1$$

þ.e.

$$P(t) = \frac{3}{100-2t}, \quad Q(t) = 1$$
$$v(t) = \exp\left(\int \frac{3\,dt}{100-2t}\right) = \exp\left(-\frac{3}{2}\ln(100-2t)\right)$$
$$v(t) = (100-2t)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{1}{v(t)} \int v(t) \cdot Q(t)\,dt \\ &= (100-2t)^{\frac{3}{2}} \int \tfrac{1}{(100-2t)^{\frac{3}{2}}}\,dt \\ &= (100-2t)^{\frac{3}{2}} \left((100-2t)^{-\frac{1}{2}} + C\right) \end{aligned}$$

Nú er $x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 100^{\frac{3}{2}}(100^{-\frac{1}{2}} + C) \quad \Rightarrow \quad C = -10^{-1}$.

$$x(t) = (100-2t)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{(100-2t)^{\frac{1}{2}}} - 10^{-1}\right)$$

$$x(t) = (100-2t) - 10^{-1} \cdot (100-2t)^{\frac{3}{2}}$$

Ath: $x(0) = 0$ og $x' + \frac{3x}{100-2t} = 1$

$$x(t) = (100-2t) - \frac{(100-2t)^{\frac{3}{2}}}{10}$$

Finnum nú hvenær styrkurinn í blöndunni nær hámarki:

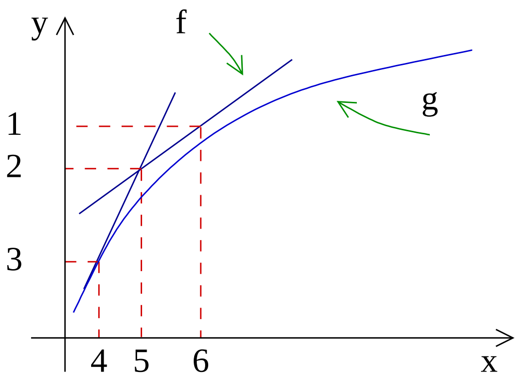
$$\begin{aligned} & \tfrac{dx}{dt} = 1 - \tfrac{3x}{100-2t} = 0 \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{3x}{100-2t} = 1 \\ \Rightarrow \quad & \tfrac{3}{(100-2t)}\left((100-2t) - \tfrac{(100-2t)^{\frac{3}{2}}}{10}\right) = 1 \\ \Rightarrow \quad & 3\left(1 - \tfrac{(100-2t)^{\frac{1}{2}}}{10}\right) = 1 \\ \Rightarrow \quad & 3 - 1 = \tfrac{3}{10}(100-2t)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \quad & 100 - 2t = \tfrac{400}{9} \\ \Rightarrow \quad & 2t = \tfrac{500}{9} \quad \Rightarrow \quad t = \tfrac{250}{9} \approx 27{,}8\,\text{mín} \end{aligned}$$

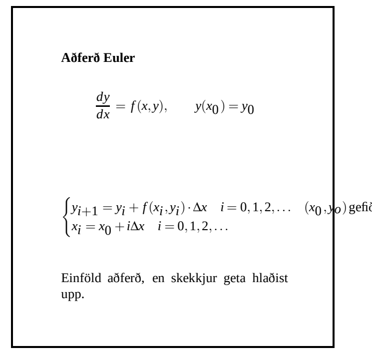
$$x(27{,}8) = (100 - 2 \cdot 27{,}8) - \frac{(100-2\cdot 27{,}8)^{\frac{3}{2}}}{10} \approx 14{,}8\,g$$

Athugið að tankurinn tæmist á 50 mín.

6 Ítarefni og yfirlit

6.1 Tölulegar lausnir með aðferð Euler




Aðferð Euler

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + f(x_i,y_i)\cdot\Delta x \quad i = 0,1,2,\dots \quad (x_0,y_o)\,\text{gefið} \\ x_i = x_0 + i\Delta x \quad i = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

Einföld aðferð, en skekkjur geta hlaðist upp.

Oftast er ekki hægt að finna nákvæma lausn á diffurjöfnu. Finnum því nálgunarlausn, eða tölulega lausn (numerical solution):
Aðferð Euler:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Látum $y(x)$ vera lausnarfallið. Tökum línulega nálgun í x_0:

$$L(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$

þ.e.

$$L(x) = y_0 + f(x_0,y_0)\cdot(x - x_0)$$

Setjum svo $x - x_0 = \Delta x$ og

$$y_1 = y_0 + f(x_0,y_0)\cdot\Delta x$$

(y_1 er nálgun á rétta gildi lausnarfallsins $y(x)$, í $x = x_0 + \Delta x$).

Þetta má nú endurtaka í $(x_0 + \Delta x, y_1) = (x_1, y_1)$.

$$y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)\cdot\Delta x$$

o.s.frv.

Euler algrímið verður því eftirfarandi:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + f(x_i,y_i)\cdot\Delta x \quad i = 0,1,2,\dots \quad (x_0,y_o)\,\text{gefið} \\ x_i = x_0 + i\Delta x \quad i = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

Í Euler aðferðinni er verið að setja mismunarkvóta í stað diffurkvóta:

$$\frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} = f(x_i, y(x_i))$$
$$y(x_i + h) = y(x_i) + f(x_i, y(x_i))h$$

þ.e.

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i,y_i)\cdot h$$

Hér er y_0 eina **rétta** gildið sem viðhöfum á lausnarfallinu, og skekkja getur “byggst upp” þegar við fjarlægjumst (x_0, y_0).

Dæmi:

$$y' = 1 + y \qquad y(0) = 1$$

<u>Ath:</u> Rétt lausn er

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln(1+y) = x + C$$
$$\ln(1+1) = C$$
$$y = -1 + e^C \cdot e^x$$
$$y(x) = 2e^x - 1$$

Látum $\Delta x = 0,1$: $\qquad y_{i+1} = y_i + (1 + y_i)\Delta x.$

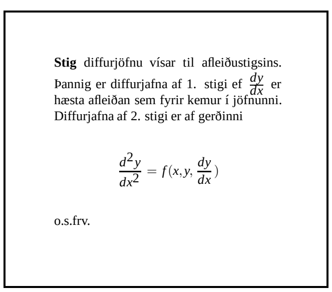
$$\begin{aligned}
y_0 &= 1 \\
y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0) \cdot \Delta x \\
&= 1 + (1+1) \cdot 0,1 = 1,2 \\
y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1) \cdot \Delta x \\
&= 1,2 + (1 + 1,2) \cdot 0,1 = 1,42 \\
y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2) \cdot \Delta x \\
&= 1,42 + (1 + 1,42) \cdot 0,1 = 1,662 \\
y_4 &= y_3 + f(x_3, y_3) \cdot \Delta x \\
&= 1,662 + (1 + 1,662)\Delta x = 1,9282
\end{aligned}$$

o.s.frv.

Hér er rétta lausnin þekkt svo bera má ofangreint saman við rétta lausn.

Athugið að mjög auðvelt er að reikna tölulegar lausnir í t.d. R og Excel.

6.2 Diffurjöfnur af hærri stigum



Stig diffurjöfnu vísar til afleiðustigsins. Þannig er diffurjafna af 1. stigi ef $\frac{dy}{dx}$ er hæsta afleiðan sem fyrir kemur í jöfnunni. Diffurjafna af 2. stigi er af gerðinni

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx})$$

o.s.frv.