Inngangur að diffurjöfnum

(MATH104.5: Diffurjöfnur)

Kjartan G. Magnusson and Gunnar Stefansson

January 4, 2015

Diffurjöfnur

Við þekkjum jöfnur af gerðinni

$$\frac{dy}{dx} = h(x)$$

þar sem h er eitthvert fall, og við vitum hvernig má leysa þær:

$$y = \int h(x)dx + C.$$

Þetta er dæmi um **diffurjöfnu**: y er eitthvert fall af x, t.d. $f(x)$, og gefið er samband sem diffurkvótinn $\frac{dy}{dx}$ uppfyllir, en finna þarf sjálft fallið $y = f(x)$.
Diffurjöfnur eru mýmargar í líffræði, t.d. fiskifræði og kerfislíffræði, lyfjafræði, eðlisfræði, efnafræði o.s.frv.

Dæmi: Árgangi fækkar vegna affalla um ákveðið hlutfall á dag.

Dæmigerð uppsetning diffurjöfnu

Oft byrjum við á að hugsa um, hvernig t.d. fall af tíma hljóti að breytast á stuttu tímabili og skrifum jöfnu sem lýsir $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ sem falli af öðrum þáttum. Þetta leiðir til diffurjöfnu þegar við látum Δt stefna á núll.

Dæmi: Veldisvöxtur og -hnignun

Dæmi: Eðlilegt er að gera ráð fyrir að breytingar í fjölda fiska í tilteknum árgangi breytast þannig að fast hlutfall drepist á stuttum tíma:

$$\frac{\Delta N}{N} = -Z\Delta t$$

sem leiðir til diffurjöfnu.

Eru til einkvæmar lausnir?

Oft er unnt að heilda og finna þá "almenna lausn".
Ef gefin eru upphafsskilyrði s.s. $y(x_0) = y_0$ má oft finna sérlausn sem uppfyllir skilyrðið.
Hugsanaleikur: Ef við þekkjum byrjunargildi og afleiðu, þá getum við teiknað fallið áfram með línulegum nálgunum (aðferð Euler, sjá síðar).

Diffurjafna af 1.stigi

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

(x kallast óháð breyta, y háð breyta).

Diffurjafnan er „sjálfstæð“ (autonomous) ef rita má $f(x, y) = g(y)$ svo jafnan verður

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

(þ.e. x kemur ekki beint fyrir í jöfnunni).
Venjulega er markmiðið að leysa diffurjöfnuna, þ.e. finna fall $y = y(x)$ þ.a.

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

Hins vegar má fá miklar upplýsingar um lausnarfallið án þess að leysa diffurjöfnuna.

"Logistic" jafnan

Jafnan

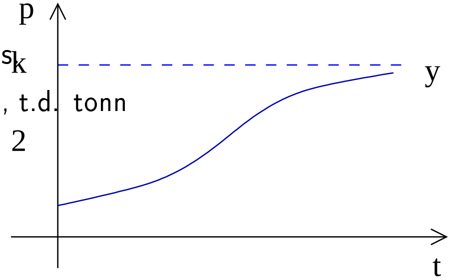
$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

kallast „logistic“ jafnan og er stundum notuð til að lýsa vexti stofns (dýrastofns) þar sem vöxturinn er takmarkaður.

$$\frac{dP}{dt} = \quad \text{vaxtahraði stofnsins}$$

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \quad \text{vaxtarhraði á stofneiningu, t.d. tonn}$$

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$



merkir því að vaxtahraði á stofneiningu **minnkar** með vaxandi stofni og er **neikvæður** ef $P > K$.

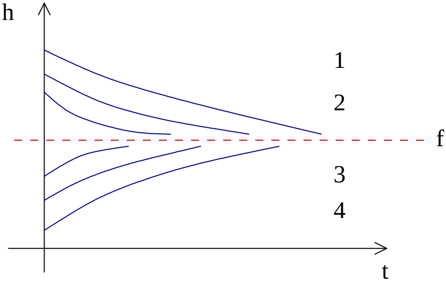
Dæmi - hitastig

$$\frac{dH}{dt} = -k(H - H_u)$$

$H(t)$ = hitastig hlutar á tíma t. H_u = hitastig umhverfis.

$$H'' = -kH' \quad = -k(-k(H - H_u)) \\ = k^2(H - H_u)$$

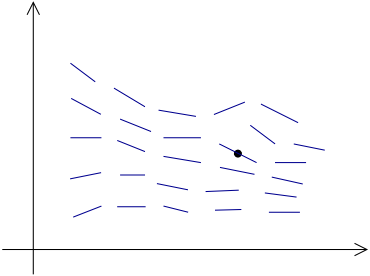
$$\Rightarrow \qquad \begin{array}{lll} H'' > 0 & \text{ef} & H > H_u \\ H'' < 0 & \text{ef} & H < H_u \end{array}$$



Hallasvið

Lausnarferill $y' = f(x, y)$ sem gengur í gegnum punkt (x, y) hefur hallatölu $f(x, y)$ í þeim punkti.

Getum teiknað strik með halla $f(x, y)$ í (x, y) fyrir ýmsa punkta (x, y). Fáum hallasvið $y' = f(x, y)$.



Athugum að ef $y(x_0) = y_0$ er upphafsskilyrði, þá má teikna eitt strikanna út frá (x_0, y_0) og það er þá líka nálgun að þeirri sérlausn.

Verkefni og lausnaraðferðir

Lítum aftur á verkefnið

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Við byrjum á að kanna eiginleika slíkrar diffurjöfnu þegar hún er **sjálfstæð**. Tveir flokkar diffurjafna verða síðan kannaðir nánar:

- Diffurjöfnur þar sem aðskilja má breyturnar x og y.
- Línulegar diffurjöfnur

Að lokum verða **blöndunardæmi** tekin sérstaklega fyrir.
Dæmi: Vöxtur fiska...

$$\frac{dL}{dt} = r(L_\infty - L)$$

Getum kannað eiginleika þessarar diffurjöfnu, eða almennari jöfnu $y' = a(b - y)$, og líka leyst hana.