Sjálfstæðar diffurjöfnur

(MATH104.5: Diffurjöfnur)

Kjartan G. Magnusson and Gunnar Stefansson

November 11, 2014

Sjálfstæða diffurjafnan

Diffurjafna er sjálfstæð ef hún er af gerðinni

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

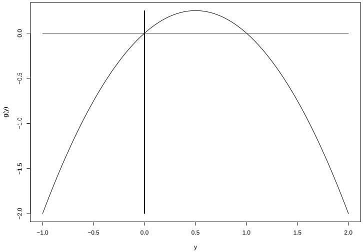

Figure: $g(y) = y(1-y)$ vs y

Dæmi: Algeng diffurjafna í líffræði er $\frac{dy}{dx} = ry(1 - \frac{y}{K})$ og þá sést að $y(x) = 0$, $\forall x$ er lausn á diffurjöfnunni og sömuleiðis $y(x) = K$, $\forall x$.

Við munum á næstu glærum athuga, hvernig hægt er að teikna lauslega (rissa) lausnarferil $\frac{dy}{dx} = g(y)$ og könnum hegðun hugsanlegra lausna.
Sjá líka `http://www.sosmath.com/diffeq/first/phaseline/phaseline.html`

Jafnvægi sjálfstæðrar diffurjöfnu

Gildi á y þ.a. $g(y) = 0$ kallast **jafnvægis-** eða **kyrrstöðupunktar** sjálfstæðrar diffurjöfnu

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

Ef upphafsgildi diffurjöfnu, $y_0 = y(x_0)$ er þannig að $g(y_0) = 0$, þá er y í jafnvægi eða kyrrstöðu, þ.e. breytist ekki.
Athugum að

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{ef} \qquad g(y) = 0$$

Dæmi:

$$\frac{dy}{dx} = ry(1 - \frac{y}{K})$$

Hér eru jafnvægispunktar $y = 0$ og $y = K$.

Ef $y'' = g'(y)y' = g'(y)g(y)$ svo ef $g(y_0) = 0$, þá er $y''(x_0) = 0$ svo $y^{(n)}(x_0) = 0 \forall n$.

Stöðug og óstöðug jafnvægi; fasalínur

Lausn $y' = g(y)$ getur leitað í átt að jafnvægi eða frá því.
Stöðugt jafnvægi: Lausn leitar í átt að jafnvægispunktinum
Óstöðugt jafnvægi: Lausn leitar frá jafnvægispunktinum
Skoðum hvar $\frac{dy}{dx} = 0$, hvar $\frac{dy}{dx} > 0$ og hvar $\frac{dy}{dx} < 0$.
Gætum einnig litið á $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}g(y) = g'(y)y' = g'(y)g(y)$.
Sjá líka `http://www.sosmath.com/diffeq/first/phaseline/phaseline.html`

Lausnarferlar

Getum rissað lausnarferla sjálfstæðrar diffurjöfnu

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

Rannsökum fallið g til að kortleggja afleiðuna $\frac{dy}{dx}$ og diffrum jöfnuna (finnum y'') til að finna vendipunkta ferlanna.
Notum formerki g og/eða aðra afleiðu y til að rannsaka stöðugleika.
Dæmi:

$$\frac{dy}{dx} = ry(1 - \frac{y}{K})$$

Munum að $y(x) = 0, \forall x$ er lausn á diffurjöfnunni og sömuleiðis $y(x) = K, \forall x$.

Athugum nú hvernig hægt er að teikna lausnarferil $\frac{dy}{dx} = g(y)$ (lauslega).

Skoðum hvar $\frac{dy}{dx} = 0$, hvar $\frac{dy}{dx} > 0$ og hvar $\frac{dy}{dx} < 0$.

Notum síðan $\frac{d^2y}{dx^2}$ til að finna vendipunktana.