Blöndun

(MATH104.5: Diffurjöfnur)

Kjartan G. Magnusson and Gunnar Stefansson

November 16, 2014

Rúmmál, massi og styrkur

- Rúmmál: Kar af rúmmáli V inniheldur vatn.
  - Einingar: rúmmetrar, lítrar, rúmsentímetrar, millilítrar, rúmdesimetrar
- Massi: Í vatninu er salt með massann M.
  - Mælieining: kg, tonn, g
- Styrkur: Blandan er af styrk C.
  - Mælieiningar: kg/l, kg/m^3, g/l
- Rennsli: Inn í karið eða úr því rennur vökvi með hraðanum q.
  - Mælieiningar: l/s, m^3/klst, l/mín

Dæmi: 100 l af vökva innihalda vatn með 1kg af salti. Styrkurinn er ...
Dæmi: Breytið einingunum í rúmmetra og grömm.
Dæmi: Rennsli er 2 l/s. Breytið einingunni í m^3/klst.

Einföld blöndun

Kar inniheldur V l af vökva (V="volume"; rúmmálseiningar)
Uppleyst efni, M kg (M="mass"; þyngd/massi)
Styrkur $C = M/V$, kg/l (C="concentration")
Í karinu blandast vökvinn fullkomnlega.
Út úr karinu rennur fullblandaður vökvi á einhverjum hraða.
Inn í karið flæðir (samtímis eða síðar) vökvi, á einhverjum hraða.
Leysum þetta verkefni á nokkrum síðum...byrjum á einfaldri blöndun.

Dæmi: 100 l af vökva innihalda vatn með 1kg af salti. Styrkurinn er ...
Bætum nú 100l af hreinu vatni saman við og fáum nýjan styrk...

Dæmi: 100 l af vökva innihalda vatn með 1kg af salti. Styrkurinn er ...
Bætum nú 10l af hreinu vatni saman við og fáum nýjan styrk...
Töppum af 10l og fáum nýtt heildarmagn af salti...

Dæmi: 100 l af vökva innihalda vatn með 1kg af salti. Styrkurinn er ...
Bætum nú 10l af vatni með 100g af salti saman við og fáum nýjan styrk...
Töppum af 10l og fáum nýtt heildarmagn af salti...

Jöfnur fyrir blöndun

- Höfum kar sem sem inniheldur V l af vökva (V="volume", í rúmmálseiningum s.s. l)
- Í vökvanum er uppleyst efni, alls M kg (M="mass", í þyngdar/massa-einingum s.s. kg)
- Styrkur lausnarinnar er þá $C = M/V$, kg/l (C="concentration", mælt í massa-per-rúmmálseiningum)
- Bætum við vökva, alls v, með styrk c og hrærum vel. Þá bætist við massinn $m = cv$.
- Nýr massi: $M + m$.
- Nýtt rúmmál: $V + v$.
- Nýr styrkur: $\frac{M+m}{V+v}$.

Verkefni: Búið til og reiknið dæmi.

Lítum á stutt tímabil...

Lítum nú á stutt tímabil, frá t til $t + \Delta t$. Jöfnurnar eiga við um tímann t eða breytingar á tímabilinu:

- Rúmmál vökva við tíma t er V_t
- Uppleyst efni með massa M_t
- Styrkur lausnarinnar er $C_t = M_t/V_t$
- Bætum við vökva, alls ΔV, með styrk C_I og hrærum vel.
- Þá bætist við massinn $\Delta M = C_I \cdot \Delta V$.
- Nýr massi: $M_t + \Delta M = M_t + C_I \cdot \Delta V$.
- Nýtt rúmmál: $V_t + \Delta V$.
- Nýr styrkur: $\frac{M_t + \Delta M}{V_+ \Delta V}$.

Verkefni: Skiljið jöfnurnar. Farið t.d. í gegnum allar einingar í öllum jöfnum.

Stutt tímabil: Tekið út og bætt við

Lítum nú á stutt tímabil, frá t til $t + \Delta t$.

- Kar með V_t l af vökva (V_t="volume",rúmmál)
- Uppleyst efni, alls M_t kg (M_t="mass", þyngd/massi)
- Styrkur lausnarinnar er þá $C_t = M_t / V_t$, kg/l (C_t="concentration", massi-per-rúmmál)
- Tökum út blöndu, alls ΔV, með styrk C_t. Þá fer út massinn $C_t \cdot \Delta V$
- Bætum við **jafnmiklum** vökva, alls ΔV, með styrk C_I og hrærum vel. Þá bætist við massinn $C_I \cdot \Delta V$.
- Massabreyting: $\Delta M = C_I \cdot \Delta V - C_t \cdot \Delta V$.
- Nýr massi: $M_t + \Delta M$.
- Jafnt flæði inn og út: Óbreytt rúmmál.
- Nýr styrkur: $\frac{M_t + \Delta M}{V}$.

Verkefni: Skrifið niður allar einingarnar í jöfnu sem lýsir massabreytingu. Hver er t.d. einingin á $\frac{\Delta M}{\Delta t}$?

Rennsli og rúmmálsbreyting

Rúmmál í upphafi: V_0

Rennsli inn: q_I

Stuttur tími: $\Delta V = q_I \cdot \Delta t - q_O \Delta t$

Rúmmál á tíma t: V_t

Rennsli út: q_O

Diffurjafna: $\frac{dV}{dt} = q_I - q_O$

– muna að ath einingar

– einfalt: finnum stofnfall

Lausn: $V_t = ...$

(i) Finnið stofnfallið; (ii) Leysið diffurjöfnuna með upphafsskilyrði (iii) Lausnin er augljós - hvers vegna?

Hverjar eru einingarnar á öllum stærðum í dæminu? Passa þær m.v. diffurjöfnuna? En lausnina?

Farið yfir einingarnar ef $V_0 = 100l$, $q_I = 2l/s$, $q_O = 1l/s$ og Δt er mælt í sek.

Farið yfir einingarnar ef $V_0 = 3.6m^3$, $q_I = 1l/s$, $q_O = 2l/s$ og Δt er mælt í klst.

Hvenær tæmist 100l tankur sem úr renna 2l/sek og inn 4l/sek? Hve hratt fyllir tómur tankur ef er látið renna inn 3l/sek og út 2l/sek.

Rennsli og massi

Hugsum um rennsli: Rennsli inn, q_I, t.d. í l/s. Rennsli út, q_O, t.d. í l/s. Oft er $q_I = q_O$, en ekki alltaf.ATH: V breytist ef $q_I \neq q_O$
Á tímanum Δt renna inn $q_I \Delta t$ og út $q_O \Delta t$.
Ef styrkurinn inn er C_I, þá rennur inn massinn $q_I \cdot C_I \Delta t$.
Út rennur massinn $q_O \cdot C \Delta t$.
Massabreytingin (nálgun á stuttum tíma) $\Delta M = q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C \Delta t = (q_I \cdot C_I - q_O \cdot C) \Delta t$

Verkefni: Farið yfir einingarnar.
Athugið að massabreytingin er **nálgun** og gildir bara þegar Δt er stutt tímabil. Hvers vegna er þetta bara nálgun og hvers vegna er það áhugavert?
Ef útflæðið er á undan innflæðinu (ekki samtímis), þá er þetta rétt jafna fyrir massabreytingu. Hvers vegna?

Rennsli og styrkur

Rennsli inn, q_I, t.d. í l/s. Rennsli út, q_O, t.d. í l/s. Oft er $q_I = q_O$, en ekki alltaf.ATH: V breytist ef $q_I \neq q_O$
Á tímanum Δt renna inn $q_I \Delta t$ og út $q_O \Delta t$.
Ef styrkurinn inn er C_I, þá rennur inn massinn $q_I \cdot C_I \Delta t$.
Út rennur massinn $q_O \cdot C \Delta t$.
Styrkbreytingin verður $\Delta C = \frac{M_t}{V_t} - \frac{M_{t+\Delta t}}{V_{t+\Delta t}}$
Ef $q_I = q_O$:, þá fæst $\Delta C = \frac{\Delta M}{V} = \frac{q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C \Delta t}{V} = \frac{q_I \cdot C_I - q_O \cdot C}{V} \Delta t$
ATH: Skrifum yfirleitt bara C en ekki C_t o.s.frv. Þurfum að muna, hvað er fall af t og hvað ekki.

Massabreyting per tímaeiningu

Ath: $\Delta M = q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C \Delta t$

$$\frac{dM}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C \Delta t}{\Delta t} = q_I \cdot C_I - q_O \cdot C = q_I \cdot C_I - q_O \cdot M/V$$

Muna: Ef $q_I \neq q_O$ þá er $V_t = V_0 + (q_I - q_O)t$ og við fáum

$$\frac{dM}{dt} = q_I \cdot C_I - q_O \cdot \frac{M}{V_0 + (q_I - q_O)t}$$

Línuleg diffurjafna: $y' + P(x)y = Q(x)$

Verkefni: Skrifið upp mismunandi dæmi, t.d. með sama eða mismunandi inn- og útflæði. Prófið mismunandi mælieiningar.

Byrjið t.d. með eftirfarandi: Kar inniheldur 100l af vökva, sem í eru 12kg af salti. Í karið renna 2l/sek af hreinu vatni og úr því renna 2l/sek af blöndu. Diffurjafna sem lýsir styrk verður...

Leysið dæmin.

Styrkbreyting per tímaeiningu

Ath ef V er fasti, þ.e. $q_I = q_O = q$:
$\Delta C = \frac{M_t}{V} - \frac{M_{t+\Delta t}}{V} = \frac{\Delta M}{V} = \frac{q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C \Delta t}{V} = q \cdot \frac{(C_I - C)\Delta t}{V}$

$$\frac{dC}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{q_I \cdot C_I \Delta t - q_O \cdot C \Delta t}{V}}{\Delta t} = \frac{q_I}{V}(C_I - C)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dC}{dt}}_{y'} = \underbrace{\frac{q_I \cdot C_I}{V}}_{a} \underbrace{- \frac{q_O}{V}}_{b} \cdot \underbrace{C}_{y} = \frac{q}{V}(C_I - C)$$

Línuleg diffurjafna: $y' = a + by$, en líka sjálfstæð og hér má aðskilja breytistærðir.
Verkefni: Setjið upp dæmi með tölum (muna að hafa innflæði=útflæði). Leysið síðan dæmin.
Verkefni: Skrifið upp almennu lausn diffurjöfnunnar.
Byrjið t.d. með eftirfarandi: Kar inniheldur 100l af vökva, sem í eru 12kg af salti. Í karið renna 2l/sek af hreinu vatni og úr því renna 2l/sek af blöndu. Diffurjafna sem lýsir styrk verður...

Lausn massajöfnunnar

Jafna sem lýsir massabreytingu (magn af efni í lausninni) er ekki háð forsendu um að innflæði og útflæði sé jafnt.
Getum leyst diffurjöfnuna...

Dæmi um tank sem tæmist

Viljum lýsa því hvernig styrkur efnis í lausn breytist.

Vökva með uppleystu efni er dælt í tank með ákveðnum hraða. Síðan er vökva hleypt úr tankinum með gefnum hraða.
Hraði breytinga á styrk = [hraði inn] - [hraði út]
Sjá sýnidæmi með glærunni