Samdreifingar

(STATS104.3: Introduction to probability - IN TRANSLATION)

Gunnar Stefánsson

July 17, 2011

Um samlíkur (joint probability)

Margar hendingar . . . sameiginlegar líkur
Tvær strjálar hendingar, X og Y:
Sameiginlegar líkur í töflu með stökum P[X=x, Y=y]

Jaðardreifingar

Tvær strjálar hendingar, X og Y:
Sameiginlegar líkur P[X=x, Y=y] í töflu, y yfir, x niður
Hægri dálkur gefur P[Y=y]

Samþéttifall - almennt

Skilgreining: Fyrir **strjálar** hendingar nefnist fallið p **samþéttifall** (eða samlíkur) hendinganna $X_1, \ldots, X_n$ ef rita má

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n] = p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

fyrir allar tölur $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ath:

$$P[X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X \ \le x\ ] = \sum_{\le} \sum_{\le} \cdots \sum_{\le} p(t_1, t_2, \ldots, t\ )$$

Samþéttiföll samfelldra hendinga

Skilgreining: Fyrir **samfelldar** hendingar nefnist fallið f **samþéttifall** hendinganna $X_1, \ldots, X_n$ ef rita má

$$P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n] =$$
$$\int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x} f(t_1, t_2, \ldots, t_n) dt_n \ldots dt_1$$

Um væntigildi hendinga

Ef X og Y eru strjálar hendingar þá reiknast væntigildi summunnar sem

$$E[X+Y] = \sum_x \sum_y (x+y)\, p(x,y)$$

og fyrir samfelldar hendingar gildir tilsvarandi jafna með tegurmerkjum. Einnig má skilgreina væntigildi af almennu (rauntölu-)falli af hendingunum þannig:

$$E[h(X,Y)] = \sum_x \sum_y h(x,y) p(x,y)$$

Rétt er að benda á hér, að vitanlega hefur hendingin $Z = h(X,Y)$ líka eigin líkindadreifingu og því mætti reikna væntigildið eins og hefðbundið er, þ.e. með $E[Z] = \sum \ zp \ (z)$ (eða með tilsvarandi tegri) en þessi jafna gefur sömu niðurstöðu og sú að ofan.

Meira um væntigildi hendinga

Setning: Ef X og Y eru hendingar og væntigildi þeirra er til, þá er $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.

... fyrir strjálar hendingar.

$$
\begin{aligned}
E[X+Y] &= \sum\sum (x+y)\, p(x,y) \\
&= \sum\sum xp(x,y) \quad + \quad \sum\sum yp(x,y) \\
&= \sum\left\{\sum xp(x,y)\right\} \quad + \quad \sum\left\{\sum yp(x,y)\right\} \\
&= \sum x\left\{\sum p(x,y)\right\} \quad + \quad \sum y\left\{\sum p(x,y)\right\} \\
&= \sum xp \quad (x) \quad + \quad \sum yp \quad (y)
\end{aligned}
$$

Óháðar hendingar

Skilgreining: Hendingar X og Y kallast óháðar ef samþéttifall þeirra er margfeldi af jaðarþéttiföllunum, þ.e.

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$$

ef um strjálar hendingar er að ræða en

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

ef hendingarnar eru samfelldar.

Ofangreint er almenn og formleg skilgreining.
Athugum að atburðir A B eru ef $P[AB] = P[A]P[B]$.
Eðlilegt: Ef X og Y (strjálar) $\Rightarrow$ óháðar ef $P[X = x, Y = y] = P[X = x]P[Y = y]$.

Samdreifni (covariance)

Skilgreining: Látum X og Y vera hendingar með væntigildi $E[X] = \mu_X$ og $E[Y] = \mu_Y$. **Samdreifni** hendinganna X og Y er

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

ef þetta væntigildi er til.

Hjálparsetning um samdreifni

Hjálparsetning: Ef X og Y eru óháðar hendingar, þá er $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$.
$p(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$.

$$\begin{aligned}
E[X \cdot Y] &= \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot p(x, y) \\
&= \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot p_X(x) p_Y(y) \\
&= \left\{ \sum_x x \cdot p_X(x) \right\} \left\{ \sum_y \cdot y p_Y(y) \right\} \\
&= E[X] \cdot E[Y]
\end{aligned}$$

Samdreifni óháðra hendinga

Setning: Ef X og Y eru óháðar hendingar, þá er $Cov(X, Y) = 0$.

f sé samþéttifall X og Y.

$$
\begin{aligned}
Cov(X, Y) &= E[(X - \mu\ \ )(Y - \mu\ \ )] \\
&= E[(X - \mu\ \ )Y] - E[(X - \mu\ \ )\mu\ \ ] \\
&= E[XY] - E[\mu\ \ Y] - E[(X - \mu\ \ )]\mu \\
&= E[X]E[Y] - \mu\ \ E[Y] - (E[X] - \mu\ \ )\mu \\
&= 0
\end{aligned}
$$

en í síðustu línunni er notað að $E[X] = \mu$ og tilsvarandi fyrir Y.

Fylgni hendinga (correlation)

Skilgreining: Látum X og Y vera hendingar með væntigildi $E[X] = \mu_X$ og $E[Y] = \mu_Y$, staðalfrávik σ_X og σ_Y og samdreifni $Cov(X, Y)$. **Fylgni** hendinganna X og Y er

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Fylgni óháðra hendinga

Setning: Ef X og Y eru óháðar hendingar, þá er $\rho_{X,Y} = 0$.
sbr setningu um samdreifni.